

Prov komplexa tal Matematik E våren 2008 FACIT

Provet består av två delar. Del A utan miniräknare! När du lämnat in del A får du ut del B och kan ta fram miniräknaren. Uppgifterna är märkta med G och VG-poäng. För Godkänt krävs minst 6 p, för VG minst 12 p varav minst 5 VG-poäng och för MVG minst 20 p. Alla svar ska ges i så enkel form som möjligt!

Namn: _____ klass: _____

Del A (Utan miniräknare men formelblad är tillåtet. Endast svar! Skriv svar direkt på detta papper.)

1. Du har talet $z = 1 - i$

a) Bestäm $|z|$ Svar: $\sqrt{2}$ (1 G)

b) Bestäm \bar{z} Svar: $1 + i$ (1 G)

c) Bestäm $\arg z$ Svar: 315° (1 G)

d) Bestäm z^2 Svar: $-2i$ (1 G)

e) Bestäm z^4 Svar: -4 (1 VG)

2. Förenkla uttrycket $5(2 + 3i) + 3i(4 - 2i)$ så långt som möjligt.

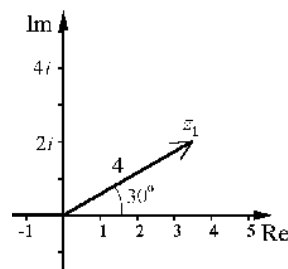
Svar: $16 + 27i$ (2 G)

3. Utför multiplikationen $2(\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ) \cdot 5(\cos 70^\circ + i \sin 70^\circ)$. Svara på formen $a+ib$

Svar: $10i$ (1 G)

4. I figuren ser du det komplexa talet z_1 . Bestäm talet exakt på rektangulär form ($a + bi$)

Svar: $z_1: 2\sqrt{3} + 2i$ (2 VG)



5. Du har talen $z_1 = 4 + 2i$ och $z_2 = 1 + i$. Beräkna: $\frac{z_1}{z_2}$

Svar: $3 - i$ (2 VG)

6. Den matematikintresserade sjörövaren Comp Lex grävde ned en skattkista på en söderhavsö. För att veta var skatten var gömd ritade han en karta över ön i ett komplext talplan där han placerade origo vid det ensliga trädet mitt på ön och angav koordinaterna för skatten med hjälp av följande uttryck:

$$\left(e^{0,5 \ln 8 + \frac{i \cdot \pi}{4}} \right)$$

Ange koordinaterna för skatten i rektangulär form, dvs på formen $a + ib$, Svaret ska anges exakt och på så enkel form som möjligt.

Svar: $2 + 2i$ (2 VG)



Del B (Med miniräknare & formelsamling. Fullständiga lösningar direkt på detta papper tack!)

7. Lös följande ekvationer. Svara i exakt form

$$x^2 + 40 = 4x \quad (2 \text{ G})$$

$$x = 2 \pm \sqrt{4 - 40} \rightarrow x = 2 \pm 6i$$

8. Lös ekvationen fullständigt. Svara exakt i formen $(a + ib)$ $z^3 = -125i$ (3 VG)

$$r^3(\cos 3v + i \sin 3v) = 125(\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ)$$

$$r = 5 \text{ och } 3v = 270^\circ + n360^\circ \rightarrow v = 90^\circ + n120^\circ$$

$$z_1 = 5(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ) = 5i$$

$$z_2 = 5(\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ) = 5\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = -\frac{5\sqrt{3} + 5i}{2}$$

$$z_3 = 5(\cos 330^\circ + i \sin 330^\circ) = 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = \frac{5\sqrt{3} - 5i}{2}$$

9. Lös ekvationen. Svara exakt: $z(7 - 2i) - iz - 2i = |3 - 4i|$ (3 VG)

$$(x + iy)(7 - 2i) - i(x + iy) - 2i = \sqrt{9 + 16}$$

$$(7x - 2xi + 7iy + 2y) - (ix - y) - 2i = \sqrt{25}$$

$$7x - 2xi + 7iy + 2y - ix + y - 2i = 5$$

$$\begin{cases} 7x + 3y = 5 & (\text{Re}) \\ -3x + 7y = 2 & (\text{Im}) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 21x + 9y = 15 \\ -21x + 49y = 14 \end{cases} \rightarrow 58y = 29 \rightarrow y = 0,5 \rightarrow x = 0,5$$

Svar: $z = 0,5 + 0,5i$

10. Bestäm en reell och en icke-reell rot till ekvationen $e^z - \frac{3}{e^z} = 2$ (3 VG)

$$t = e^z \rightarrow t - \frac{3}{t} = 2 \rightarrow t^2 - 2t - 3 = 0 \rightarrow \begin{matrix} t = 3 \\ t = -1 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} e^z = 3 \rightarrow z = \ln 3 \\ e^z = -1 \rightarrow z = i\pi \end{matrix}$$

Svar: $z = \ln 3$ och $z = i\pi$